www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail

DURÉE : 4 heures

$\mathbb{R}$ désigne l'ensemble des nombres réels, $\mathbb{R}^*$ l'ensemble des nombres réels différents de 0.

Dans tout le problème, on désigne par $\mathscr{E}$ l'ensemble des applications continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On rappelle que $\mathscr{E}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

L'objet du problème est l'étude de la correspondance T qui à toute application f de $\mathscr{E}$ associe l'application $\overline{f}$ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} \overline{f}(0) = f(0) \\ \overline{f}(x) = \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt \text{ lorsque } x \text{ est un réel non nul.} \end{cases}$$

On rappelle que pour f élément de $\mathscr{E}$, l'application F définie sur $\mathbb{R}$ par : $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$ est la primitive de f qui s'annule en 0.

Les différentes parties du problème sont dans une large mesure indépendantes les unes des autres.

PREMIÈRE PARTIE *Propriétés algébriques de T*

1. Montrer que si f est un élément de $\mathscr{E}$, alors $\overline{f}$ est aussi élément de $\mathscr{E}$.

   T désigne désormais l'application de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{E}$ qui à tout élément f de $\mathscr{E}$ associe $T(f) = \overline{f}$.

2. Montrer que T est un endomorphisme de $\mathscr{E}$.

   Montrer que T est injectif.

3. Soit l l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $l(x) = \sqrt{|x|}$.

   Déterminer $\overline{l}$.

   En déduire que l appartient à l'image de T.

4. *a.* Démontrer que l'image de T est exactement l'ensemble des applications g continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, dérivables sur $\mathbb{R}^*$, et dont la dérivée g' est continue sur $\mathbb{R}^*$ et vérifie : $\lim\limits_{x\to 0} xg'(x) = 0$.

   b. L'application m de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $\begin{cases} m(0) = 0 \\ m(x) = x\sin\dfrac{1}{x} & \text{lorsque } x \text{ est un réel non nul} \end{cases}$

   possède-t-elle un antécédent par T ?

   c. Donner un exemple d'application appartenant à l'image de T mais qui ne soit pas dérivable en 0.

5. *Recherche des valeurs propres et vecteurs propres de T.*

   a. Soit λ une valeur propre de T, et f un vecteur propre de T associé à la valeur propre λ.

   Montrer d'une part que $f(0) = \lambda f(0)$ et d'autre part que f vérifie sur $]0, +\infty[$ et sur $]-\infty, 0[$ une même équation différentielle du premier ordre que l'on explicitera.

   Résoudre cette équation différentielle sur chacun des intervalles considérés. (On étudiera séparément les cas $\lambda = 1$ et $\lambda \neq 1$).

   b. En déduire très précisément l'ensemble des valeurs propres de T et pour chacune d'entre elles le sous-espace propre correspondant dont on précisera la dimension.

6. *Application.*

   On considère pour chaque valeur du paramètre réel λ l'équation différentielle (E_λ) :

   $$(E_\lambda) \qquad \lambda x y'' - (2\lambda x^2 + 1 - \lambda) y' - 2(2\lambda - 1) xy = 0.$$

   Soit I un intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$. On dira que y est une solution de (E_λ) sur I si y est deux fois continûment dérivable sur I (c'est-à-dire que y est deux fois dérivable sur I et y'' est continue sur I), et vérifie l'égalité précédente pour tout élément x de I.

Tournez la page S.V.P.

a. Résoudre (E_0) (correspondant au cas $\lambda = 0$) sur $\mathbb{R}$.

b. À toute application y de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, on associe l'application z de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $z(x) = 2x\,y(x) - y'(x)$.

Montrer que z appartient à $\mathscr{E}$.

Montrer que si z est un vecteur propre de T associé à la valeur propre λ, alors y est solution de (E_λ) sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$.

c. En déduire par un raisonnement rigoureux toutes les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle (E_1) correspondant au cas $\lambda = \frac{1}{4}$.

d. On rappelle que $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Déterminer la solution y_1 de (E_1), (équation correspondant au cas $\lambda = 1$) sur $\mathbb{R}$, qui vérifie $y_1(0) = 0$ et $\lim_{x \to +\infty} e^{-x^2} y_1(x) = 1$,

DEUXIÈME PARTIE *Étude locale de $\overline{f}$*

On rappelle le résultat suivant, appelé formule de la moyenne : soit f et g deux applications continues sur un intervalle $[a, b]$ de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$. On suppose que g est de signe constant sur $[a, b]$. Alors il existe un élément c de $[a, b]$ tel que :

$$\int_a^b f(t)\,g(t)\,dt = f(c)\int_a^b g(t)\,dt.$$

1. Soit n un entier naturel. On suppose que l'élément f de $\mathscr{E}$ admet un développement limité à l'ordre n en 0.

Montrer qu'alors $\overline{f}$ admet un développement limité à l'ordre n en 0. (On pourra utiliser la formule de la moyenne.)

2. *a.* Soit ε un réel strictement positif. Soit n un entier naturel et α un élément de $\mathscr{E}$ tels qu'il existe un réel A strictement positif pour lequel :

$$\forall t \in [A, +\infty[, \quad |\alpha(t)| \leqslant \frac{\varepsilon(n+1)}{2}.$$

Montrer qu'il existe un réel B supérieur à A tel que :

$$\forall x \in [B, +\infty[, \quad \frac{\left|\int_0^x t^n \alpha(t)\,dt\right|}{x^{n+1}} \leqslant \varepsilon.$$

$\left(\text{On pourra décomposer : } \int_0^x t^n \alpha(t)\,dt = \int_0^A t^n \alpha(t)\,dt + \int_A^x t^n \alpha(t)\,dt\right)$.

b. En déduire que si f est un élément de $\mathscr{E}$ qui peut s'écrire sous la forme :

$$f(x) = a_{n+p}\,x^{n+p} + \ldots + a_n\,x^n + x^n\,\alpha(x),$$

n et p étant deux entiers naturels, $a_{n+p}, \ldots, a_n$ étant $(p+1)$ réels et α un élément de $\mathscr{E}$ vérifiant $\lim_{x \to +\infty} \alpha(x) = 0$, alors $\overline{f}$ peut également s'écrire sous la forme :

$$\overline{f}(x) = b_{n+p}\,x^{n+p} + \ldots + b_n\,x^n + x^n\,\beta(x),$$

$b_{n+p}, \ldots, b_n$ étant $(p+1)$ réels et β une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant $\lim_{x \to +\infty} \beta(x) = 0$.

c. Énoncer clairement le résultat obtenu à la question précédente lorsque $n = p = 0$.

3. Soit f un élément de $\mathscr{E}$.

Montrer que si f est croissante (resp. décroissante) sur un intervalle I de la forme $[0, c]$ (où c est un réel strictement positif), alors pour tout élément x de I, on a $\overline{f}(x) \leqslant f(x)$ (resp. $\overline{f}(x) \geqslant f(x)$), puis montrer que $\overline{f}$ est croissante sur I (resp. décroissante sur I).

Énoncer les résultats analogues concernant f croissante (resp. décroissante) sur un intervalle J de la forme $[-c, 0]$ (où c est un réel strictement positif).

Tournez la page S.V.P.

4. *Application.*

a. Étudier l'application u de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $\begin{cases} u(0) = 1 \\ u(x) = \dfrac{x}{e^x - 1} \text{ lorsque } x \text{ est un réel non nul.} \end{cases}$

On montrera en particulier que u est un élément de $\mathscr{D}$.

b. À l'aide des questions précédentes, donner les variations de $\overline{u}$ et le comportement de $\overline{u}$ aux voisinages de $+\infty$ et de $-\infty$.

Montrer que $\overline{u}$ admet un développement limité à l'ordre 2 en 0 que l'on explicitera.

c. Soit $\mathscr{R}$ un repère orthonormé du plan.

On note (C) (resp. (Γ)) la courbe représentative de u (resp. $\overline{u}$) dans $\mathscr{R}$.

Préciser les positions relatives de (C) et (Γ) et donner *l'allure* de ces courbes sur un même graphique.

(Il n'est pas demandé dans cette question un tracé point par point précis, mais un tracé succinct en précisant les asymptotes éventuelles et le comportement au voisinage de 0.)

TROISIÈME PARTIE

On considère le sous-ensemble $\mathscr{L}$ de $\mathscr{C}$ constitué des applications f de $\mathscr{C}$ qui vérifient :

$$\int_0^{+\infty} f^2(t)\,dt < +\infty .$$

Et pour f appartenant à $\mathscr{L}$, on note $N(f)$ la quantité $\left(\int_0^{+\infty} f^2(t)\,dt\right)^{\frac{1}{2}}$.

$\mathscr{L}^*$ désigne l'ensemble des éléments de $\mathscr{L}$ dont la restriction à $]0, +\infty[$ n'est pas identiquement nulle.

On rappelle enfin l'inégalité suivante (de Cauchy-Schwarz) : si f et g sont deux applications continues sur $[a, b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, alors :

$$\left|\int_a^b f(t)\,g(t)\,dt\right|^2 \leqslant \left(\int_a^b f^2(t)\,dt\right)\cdot\left(\int_a^b g^2(t)\,dt\right).$$

1. Soit f un élément de $\mathscr{C}$ et F définie par $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$.

Soit a et b deux réels tels que $0 < a < b$.

Montrer à l'aide d'une intégration par parties que : $\int_a^b (\overline{f})^2(t)\,dt \leqslant \dfrac{F^2(a)}{a} + 2\int_a^b f(t)\,\overline{f}(t)\,dt$.

Après avoir remarqué que $F^2(a) = a^2(\overline{f})^2(a)$, déduire de l'inégalité précédente :

$$\left(\int_0^b (\overline{f})^2(t)\,dt\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant 2\left(\int_0^b f^2(t)\,dt\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Prouver enfin que si f est un élément de $\mathscr{L}$, alors $\overline{f}$ appartient également à $\mathscr{L}$.

2. Vérifier que si f est un élément de $\mathscr{L}^*$, alors $N(f) \neq 0$ et montrer que : $\sup_{f\in\mathscr{L}^*} \dfrac{N(\overline{f})}{N(f)} \leqslant 2$.

3. Pour n entier supérieur ou égal à 2 on définit f_n par :

$$\begin{cases} \forall x \in]-\infty, 1[\quad f_n(x) = 1 \\ \forall x \in [1, n[\quad f_n(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}} \\ \forall x \in [n, +\infty[\quad f_n(x) = \dfrac{n\sqrt{n}}{x^2} \end{cases}$$

Tournez la page S.V.P.

a. Montrer que f_n appartient à $\mathscr{L}$, calculer $N(f_n)$ et donner un équivalent de $N(f_n)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

b. Déterminer avec soin $\overline{f_n}$. Calculer $N(\overline{f_n})$ et donner un équivalent de $N(\overline{f_n})$ lorsque n tend vers $+\infty$.

c. Que vaut $\sup_{f \in \mathscr{L}^*} \dfrac{N(\overline{f})}{N(f)}$?

QUATRIÈME PARTIE

1. Soit f un élément de $\mathscr{C}$, périodique de période P ($P \in \mathbb{R}^*$).
Montrer que $\overline{f}$ admet une limite lorsque x tend vers $+\infty$ et que cette limite est égale à : $\dfrac{1}{P}\displaystyle\int_0^P f(t)\,dt$.
En déduire un exemple de fonction f de $\mathscr{C}$ telle que $\lim_{x \to +\infty} \overline{f}(x) = 0$, bien que $f(x)$ n'admette pas de limite lorsque x tend vers $+\infty$.

Dans la deuxième partie, on a montré que si $\lim_{x \to +\infty} f(x) = l$, (où l est un réel), alors $\lim_{x \to +\infty} \overline{f}(x) = l$. La suite de cette partie consiste en l'étude d'une réciproque partielle de ce résultat.

2. Soit n un entier naturel non nul et h une fonction continue sur $[1, +\infty[$. Pour x appartenant à $[1, +\infty[$, on pose $H(x) = \displaystyle\int_1^x h(t)\,dt$.

a. Soit ε une application continue sur $[1, +\infty[$ telle que $\lim_{x \to +\infty} \varepsilon(x) = 0$.

Montrer que : $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x^n}\displaystyle\int_1^x t^{n-1}\varepsilon(t)\,dt = 0$.

(On pourra décomposer $\displaystyle\int_1^x t^{n-1}\varepsilon(t)\,dt = \int_1^A t^{n-1}\varepsilon(t)\,dt + \int_A^x t^{n-1}\varepsilon(t)\,dt$, pour un A convenable).

b. On suppose que $\lim_{x \to +\infty} H(x) = \lambda$, où λ est un réel.

Montrer que : $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x^n}\displaystyle\int_1^x t^{n-1} H(t)\,dt = \frac{\lambda}{n}$,

puis, à l'aide d'une intégration par parties, en déduire que : $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x^n}\displaystyle\int_1^x t^n h(t)\,dt = 0$.

3. Soit g une fonction de $\mathscr{C}$, bornée sur $\mathbb{R}$.
Pour tout réel x appartenant à $[1, +\infty[$, on pose $K(x) = \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_1^x g(t)\,dt$ et l'on suppose que $\lim_{x \to +\infty} \displaystyle\int_1^x g(t)\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{x}\right)dt = \lambda$, où λ est un réel.

a. Montrer que, pour tout réel x appartenant à $[1, +\infty[$: $\displaystyle\int_1^x \frac{K(t)}{t}\,dt = \int_1^x g(t)\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{x}\right)dt$.

b. En déduire que pour tout entier naturel non nul n : $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x^n}\displaystyle\int_1^x t^{n-1} K(t)\,dt = 0$.

c. Montrer que, pour tout réel x appartenant à $[1, +\infty[$: $\left|\displaystyle\int_1^x \frac{t^{n-1}}{x^n} g(t)\,dt\right| \leqslant \frac{1}{n} \sup_{y \in [1, +\infty[} |g(y)|$.

Tournez la page S.V.P.

d. Montrer que, pour tout réel x appartenant à $[1, +\infty[$ et pour tout entier n supérieur ou égal à 2 :

$$\frac{1}{x^n}\int_1^x t^{n-1}\,K(t)\,dt = \frac{1}{n-1}\cdot\frac{1}{x}\int_1^x g(t)\,dt - \frac{1}{n-1}\int_1^x \frac{t^{n-1}}{x^n}\,g(t)\,dt.$$

En déduire que $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\int_1^x g(t)\,dt = 0$, puis que $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\int_0^x g(t)\,dt = 0$.

4. Soit f une fonction continûment dérivable sur $\mathbb{R}$, telle que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = xf'(x)$ soit bornée sur $\mathbb{R}$.

On suppose que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l$, où l est un réel.

a. Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} \int_1^x tf'(t)\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{x}\right)dt = l - f(1)$.

(On pourra utiliser une intégration par parties.)

b. En déduire à l'aide de la question 3. que : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\int_1^x tf'(t)\,dt = 0$.

c. Et montrer pour finir que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l$.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail